

VYBRANÉ LOGISTICKÉ MODELY POUŽÍVANÉ PRO VYROVNÁVÁNÍ A EXTRAPOLACI KŘIVKY ÚMRTNOSTI A VLIV POUŽITÝCH MODELŮ NA HODNOTU STŘEDNÍ DÉLKY ŽIVOTA

SELECTED LOGISTIC MODELS USED FOR BALANCING AND EXTRAPOLATION OF MORTALITY CURVES , AND THE IMPACT OF THE MODELS TO THE LIFE EXPECTANCY

Petra Dotlačilová, Ondřej Šimpach

Vysoká škola ekonomická v Praze

xdotp00@vse.cz, ondrej.simpach@vse.cz

Klíčová slova:

úmrtnost – logistické modely – GM model – úmrtnostní tabulky
bez extrapolace

Key words:

mortality – logistic models – GM function – mortality tables without
extrapolation

Abstract:

Recently been improving mortality rates. Therefore, it is increasingly important to model the evolution of the most - specific mortality rates at the highest ages. In the past, there were used for modelling of mortality the Gompertz–Makeham (GM), or modified Gompertz–Makeham (mGM) function. But due to the improvement in mortality rates is important to develop new models that better reflect current developments of mortality. Today is preferred logistic models, even if one of those optimistic. In this paper we will present selected logistic models. The results will be compared with mortality tables according to the Czech Statistical Office (CZSO) methodology, with mortality tables without extrapolation and still most common GM, or mGM function. At the conclusion, there will be given the social and economic consequences of increasing life expectancy.

Úvod

V minulosti se pro vyrovnávání a extrapolaci křivky úmrtnosti nejvíce používal Gompertz–Makehamův (GM), resp. modifikovaný Gompertz–Makehamův (mGM) model. V současné době dochází ke zlepšování úmrtnostních poměrů. Vzhledem k současnému vývoji je třeba nahradit dosud nejpoužívanější GM model nějakým jiným modelem. V současné době se pro vyrovnávání a extrapolaci křivky úmrtnosti nejvíce používají logistické modely.

1. Metodika

Pro hodnocení úmrtnostních poměrů se nejvíce používá ukazatel nazývaný střední délka života v přesném věku x . Je to ukazatel, který získáme z úmrtnostních tabulek. Střední délka života udává, jak dlouho bude ještě v průměru na živu osoba v přesném věku x , pokud se nezmění úmrtnostní poměry, které platily v době jejího narození (Pavlík, Kalibová [9]).

Při samotném výpočtu úmrtnostních tabulek postupujeme v několika krocích. Jedním z nich je výpočet specifických měr úmrtnosti. Při jejich výpočtu musíme vzít v úvahu, horší dostupnost dat o úmrtnosti v nejvyšších věcích. Z tohoto důvodu je třeba vyrovnat specifické míry úmrtnosti a k dalším výpočtům použít až ty vyrovnané hodnoty.

Pro vyrovnávání specifických úmrtností v nejvyšších věcích můžeme použít několik modelů. Výběr nejvhodnějšího modelu záleží i na tom, jaká data zpracováváme (Gavrilov, Gavrilova [7]). V současné době se upřednostňují logistické modely. Pro náš příspěvek jsme si vybrali Thatcherův a Kannistův logistický model. Získané výsledky porovnáme s úmrtnostními tabulkami podle Českého statistického úřadu (ČSÚ), s úmrtnostními tabulkami bez extrapolace a s výsledky podle GM, resp. mGM modelu. Při výpočtu úmrtnostních tabulek podle ČSÚ (ČSÚ [3]) nejprve vypočteme empirické hodnoty specifické míry úmrtnosti podle vzorce:

$$m_{t,x} = \frac{M_{t,x}}{\bar{S}_{t,x}}, \quad (1)$$

kde $M_{t,x}$ je počet zemřelých x -letých v roce t ,

$\bar{S}_{t,x}$ je střední stav počtu žijících x -letých v roce t .

V dalším kroku vypočteme vyrovnané specifické míry úmrtností. Nejprve budeme vyrovnávat pomocí klouzavých průměrů. V závislosti na věku použijeme různé typy vyrovnání (Fiala [6]):

- vyrovnání ze tří hodnot:

$$\tilde{m}_x^{(3)} = \frac{m_{x-1} + m_x + m_{x+1}}{3}, \quad x \in \langle 3;5 \rangle \quad (2)$$

- vyrovnání z devíti hodnot:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_x^{(9)} = & 0,2 \cdot m_x + 0,16 \cdot (m_{x-1} + m_{x+1}) + 0,12 \cdot (m_{x-2} + m_{x+2}) \\ & + 0,08 \cdot (m_{x-3} + m_{x+3}) + 0,04 \cdot (m_{x-4} + m_{x+4}) \end{aligned} \quad x \in \langle 6;29 \rangle \quad (3)$$

- vyrovnání z devatenácti hodnot:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_x^{(19)} = & 0,2 \cdot m_x + 0,1824 \cdot (m_{x-1} + m_{x+1}) + 0,1392 \cdot (m_{x-2} + m_{x+2}) + \\ & + 0,0848 \cdot (m_{x-3} + m_{x+3}) + 0,0336 \cdot (m_{x-4} + m_{x+4}) - 0,0128 \cdot (m_{x-6} + m_{x+6}) - \\ & - 0,0144 \cdot (m_{x-7} + m_{x+7}) - 0,0096 \cdot (m_{x-8} + m_{x+8}) - 0,0032 \cdot (m_{x-9} + m_{x+9}) \end{aligned} \quad x \in \langle 30;59 \rangle. \quad (4)$$

Od 60 – ti do 82 let použijeme pro vyrovnání GM model (e.g. Boleslawski, Tableau [1]):

$$\mu_x = a + b.c^x, \quad x \in \langle 60; 82 \rangle, \quad (5)$$

kde μ_x je intenzita úmrtnosti a , b a c jsou parametry modelu a x je věk. Pro věkové rozmezí od 83 let do 110 – ti let použijeme mGM model (e.g. Boleslawski, Tableau [1]):

$$\mu_x = a + b.c^{x_0 + \frac{1}{\gamma} \ln[\gamma \cdot (x - x_0) + 1]}, \quad x \in \langle 83; 110 \rangle, \quad (6)$$

kde $x > x_0$, x_0 je věk, od kterého se provádí vyrovnání pomocí mGM modelu, a , b , c a γ jsou parametry modelu. Pro studii jsme si z logistických modelů vybrali Thatcherův a Kannistův model. Thatcherův model (e.g. Burcin et al. [2]) :

$$\mu_x = \frac{z}{1+z} + \gamma, \quad (7)$$

kde $z = \alpha.e^{\beta \cdot x}$, α , β a γ jsou parametry modelu. Kannistův model (e.g. Thatcher et al. [10]) má podobu:

$$\mu_x = \frac{e^{[\Theta_0 + \Theta_1 \cdot (x - 80)]}}{1 + e^{[\Theta_0 + \Theta_1 \cdot (x - 80)]}}, \quad \text{pro } x \geq 80 \quad (8)$$

kde Θ_0, Θ_1 jsou parametry modelu, které nabývají nezáporných hodnot, μ_x je intenzita úmrtnosti ve věku x . V další části příspěvku jsme vypočetli úmrtnostní tabulky bez extrapolace. K výpočtu byl použit algoritmus pro výpočet úplných úmrtnostních tabulek. V závěru je provedeno vyrovnávání specifických měř úmrtnosti pomocí GM a mGM modelu.

2. Analýza dat

Pro praktickou aplikaci byla použita data o úmrtnosti české populace z roku 2009. Pro vyrovnání specifických úmrtností jsme použili již dříve zmíněné metody. Jako výstupy z úmrtnostních tabulek jsme získali hodnoty střední délky života v přesném věku x . Nejdůležitějším výstupem je střední délka života 0 – letých. Je však důležité uvědomit si, že v průběhu života dochází ke změnám intenzity úmrtnosti. Střední délka života v přesném věku x se mění v souvislosti s měnící se intenzitou úmrtnosti. Z tohoto důvodu je zajímavé její hodnotu sledovat i v některých dalších věcích (jde o tzv. kritické věky). Proto zde uvádíme její hodnoty nejen pro věk 0 ale i pro další věky. Výsledky uvádíme zvlášť pro muže a pro ženy.

TAB. 1 a: Střední délka života v přesném věku x – Česká republika - muži

Model	Střední délka života v přesném věku x - Česká republika - muži									
	0	15	20	50	65	80	85	90	95	100
GM	74,2	59,6	54,7	26,5	15,2	7,1	5,2	3,7	2,6	1,8
mGM	74,2	59,6	54,7	26,5	15,2	6,7	4,7	3,2	2,1	1,4
Kannistö	74,4	59,8	54,9	26,8	15,4	7,2	5,5	4,1	3,1	2,4
Thatcher	74,2	59,6	54,8	26,6	15,3	6,8	4,9	3,5	2,6	1,9
ČSÚ	74,2	59,6	54,7	26,6	15,3	6,8	4,8	3,4	2,4	1,7
bez extrapolace	75,0	60,6	55,7	27,4	15,8	7,2	5,1	3,7	3,3	6,5

Zdroj: vlastní výpočty, (ČSÚ [3], Deras [4], Eurostat [5], Human Mortality Database [8])

TAB. 1 b: Střední délka života v přesném věku x – Česká republika – ženy

Model	Střední délka života v přesném věku x - Česká republika - ženy									
	0	15	20	50	65	80	85	90	95	100
GM	80,3	65,6	60,7	31,6	18,5	8,0	5,5	3,7	2,3	1,4
mGM	80,2	65,5	60,6	31,5	18,4	7,6	5,1	3,2	1,9	1,1
Kannistö	80,4	65,7	60,8	31,7	18,6	8,2	5,9	4,1	2,9	2,1
Thatcher	80,3	65,6	60,7	31,6	18,5	7,8	5,3	3,5	2,4	1,8
ČSÚ	80,3	65,7	60,7	31,7	18,6	7,8	5,4	3,7	2,5	1,7
bez extrapolace	81,2	66,7	61,8	32,6	19,4	8,5	5,9	4,2	3,5	6,1

Zdroj: vlastní výpočty, (ČSÚ [3], Deras [4], Eurostat [5], Human Mortality Database [8])

Závěr

Ze získaných výsledků můžeme usuzovat, že Kannistův model opravdu patří mezi optimistické modely. Při jeho použití získáme nejvyšší hodnoty střední délky života v přesném věku x . Thatcherův model také dává vyšší hodnoty střední délky života v přesném věku x (neplatí to ale pro celé věkové rozpětí). Pokud budeme porovnávat získané výsledky s metodikou ČSÚ, tak zjistíme, že nejbližší je Thatcherův model. Při porovnávání získaných výsledků z úmrtnostních tabulek bez extrapolace s ostatními modely zjistíme, že nejbližší je Kannistův model. V neposlední řadě je důležité uvědomit si, že prodlužující se střední délka života bude mít zásadní dopad na ekonomickou situaci země. Bude to znamenat, že populace bude postupně stárnout a i s touto situací bude třeba se vypořádat. V budoucnu bude třeba vyřešit, kdo uživí stárnoucí populaci. I z tohoto je důležité mít co nejlepší modely pro vyrovnávání a extrapolaci křivky úmrtnosti. Do budoucna bude

stále důležitější mít co nejpřesnější představu o vývoji úmrtnostních poměrů. Stárnutí populace bude mít také dopad na sociální a zdravotní systém. I to je další důvod, proč potřebujeme co nejpřesnější odhady střední délky života v přesném věku x . A tedy i co nejlepší modely používané pro vyrovnávání a extrapolaci křivky úmrtnosti. Stárnutí populace způsobí zvýšení počtu osob v důchodovém věku. Z pohledu sociálního systému to znamená, že bude třeba zařídit dostatek sociální péče o stárnoucí obyvatelstvo. Ale znamená to také větší zátěž v rozpočtu na vyplácení důchodů. Pokud se zaměříme na zdravotní systém, bude třeba se připravit na zvyšující se objem péče o lidi v důchodovém věku. Také je třeba si uvědomit, že dnešní staří lidé mají jiné nároky, než budou mít budoucí důchodci. V budoucnu budou nároky lidí v důchodovém věku vyšší, než jsou dnes.

Literatura:

- [1] BOLESŁAWSKI, L., TABEAU, E. 2001. *Comparing Theoretical Age Patterns of Mortality Beyond the Age of 80*. In: TABEAU, E., VAN DEN BERG JETHS, A. a HEATHCOTE, CH. (eds.) 2001. *Forecasting Mortality in Developed Countries: Insights from a Statistical, Demographic and Epidemiological Perspective*. s. 127 – 155. ISBN 978-0-7923-6833-5.
- [2] BURCIN, B., TESÁRKOVÁ, K. a ŠÍDLO, L. *Nejpoužívanější metody vyrovnávání a extrapolace křivky úmrtnosti a jejich aplikace na českou populaci*. Demografie 52, 2010: 77 – 89.
- [3] ČSÚ 2012. 19. 1. 2012. <http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/umrtnostni_tabulky_metodika>
- [4] BURCIN, B., HULÍKOVÁ TESÁRKOVÁ, K., KOMÁNEK, D. (2012) *DeRaS: software tool for modelling mortality intensities and life table construction*. Charles University in Prague, Prague. <http://deras.natur.cuni.cz>
- [5] Eurostat. 4. 11. 2012. <<http://ec.europa.eu/eurostat>>
- [6] FIALA, T. *Výpočty aktuárské demografie v tabulkovém procesoru*. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 2005. ISBN 80-2450821-4.
- [7] GAVRILOV, L., A., GAVRILOVA, N., S. *Mortality measurement at advanced ages: a study of social security administration death master file*. North American actuarial journal 15 (3): 432 – 447.
- [8] Human Mortality Database. 23. 8. 2012. <www.mortality.org>
- [9] PAVLÍK, Z., KALIBOVÁ, K. *Monohojazyčný demografický slovník*. Praha: Česká demografická společnost, 2005
- [10] THATCHER, R., A., KANISTÖ, V. a VAUPEL, J., W. 1998. *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*. 1998. ISBN 87-7838-381-1.