

Vybrané logistické modely používané pro vyrovnávání a extrapolaci křivky úmrtnosti a jejich aplikace na populace vybraných zemí Evropské unie

Selected logistic models used for leveling and extrapolate mortality curves and their application to the population of the EU countries

Petra Dotlačilová, Jana Langhamrová, Ondřej Šimpach

Abstract: Demographers are constantly trying to find a model that best described the relationship between mortality and age. In the past, for leveling and extrapolate mortality curves most used Gompertz - Makeham model. But at present it is important to develop new models because people are reaching ever higher age. The second reason is better availability of statistical data. Already in the past, was established in several other models used for leveling and extrapolate mortality curves. Currently, come to the fore logistic models. In this paper we will present selected logistic models and we will apply them to data on populations of selected EU countries. The results will be compared with results obtained using the Gompertz - Makeham, Modified Gompertz - Makeham model, mortality tables according to the Czech statistical office methodology and mortality tables without extrapolation.

Abstrakt: Demografové se neustále snaží najít model, který by co nejlépe popisoval vztah mezi úmrtností a věkem. V minulosti se pro vyrovnávání a extrapolaci křivky úmrtnosti nejvíce používal Gompertz – Makehamův model. Ale v současné době je důležité vyvíjet nové modely, protože se lidé dožívají stále vyššího věku. Druhým důvodem je lepší dostupnost statistických dat. Už v minulosti vzniklo v několik dalších modelů používaných pro vyrovnávání a extrapolaci křivky úmrtnosti. V současné době se dostávají do popředí logistické modely. V tomto článku budou představeny vybrané logistické modely a budou aplikovány na data o úmrtnosti populací vybraných zemí Evropské unie. Získané výsledky budou porovnány s výsledky získanými při použití Gompertz – Makehamova, Modifikovaného Gompertz – Makehamova modelu, s metodikou Českého statistického úřadu a s úmrtnostními tabulkami bez extrapolace.

Key words: mortality at the highest ages, logistic models, Gompertz – Makeham function, Modified Gompertz – Makeham function, mortality tables without extrapolation

Klíčová slova: úmrtnost v nejvyšších věcích, logistické modely, Gompertz – Makehamův model, Modifikovaný Gompertz – Makehamův model, úmrtnostní tabulky bez extrapolace

JEL classification: C, C1, C10

1. Úvod

V minulosti se pro vyrovnávání a extrapolaci křivky úmrtnosti nejvíce používal Gompertz – Makehamův model, ale v současné době je důležité vyvíjet další modely. Je to způsobeno především tím, že v minulosti se jen málo lidí dožilo vysokého věku. V dnešní době je situace odlišná. Zvyšuje se úroveň lékařské péče a roste zájem o zdravý životní styl. To způsobuje, že se dnes lidé mohou dožít vyššího věku než jejich předci. Vzhledem ke zlepšování úmrtnostních poměrů se stále více ukazuje, že Gompertz – Makehamův model bude potřeba nahradit nějakým jiným modelem. V současné době se pro vyrovnávání a extrapolaci křivky úmrtnosti nejvíce používají logistické modely. Je však třeba uvědomit si, že logistické modely patří mezi ty optimističtější. Při jejich použití dostaneme vyšší naději dožití než v případě Gompertz – Makehamova modelu.

2. Teoretická část

Pro vyrovnávání specifických úmrtností v nejvyšších věcích je možné použít hned několik již existujících modelů. Po dlouhou dobu se nejvíce požíval Gompertz – Makehamův model. V současné době se naopak upřednostňují logistické modely. V našem příspěvku jsme se zaměřili na dva z nich (tj. na Thatcherův a Kannistův logistický model). Získané výsledky budeme porovnávat s výsledky podle metodiky ČSÚ, s nadějí dožití získanou z úmrtnostních tabulek bez extrapolace a s dosud nepoužívanějším Gompertz – Makehamovým (resp. Modifikovaným Gompertz – Makehamovým) modelem. Při výpočtu úmrtnostních tabulek podle metodiky ČSÚ nejprve vypočteme empirické hodnoty specifické míry úmrtnosti podle vzorce (ČSÚ, 2012):

$$m_{t,x} = \frac{M_{t,x}}{\bar{S}_{t,x}}, \quad (1)$$

kde $M_{t,x}$ je počet zemřelých x – letých v roce t ,

$\bar{S}_{t,x}$ je střední stav počtu žijících x – letých v roce t .

V dalším kroku vyrovnáme empirické hodnoty specifických měr úmrtností nejprve pomocí klouzavých průměrů. V závislosti na věku použijeme různé typy vyrovnání. Pro věk 1 a 2 budou hodnoty vyrovnaných specifických měr úmrtnosti shodné s empirickými hodnotami pro tentýž věk. Pro věky od 3 do 59 – ti let použijeme vyrovnání pomocí klouzavých průměrů (Fiala., 2005):

- vyrovnání ze tří hodnot:

$$\tilde{m}_x^{(3)} = \frac{m_{x-1} + m_x + m_{x+1}}{3}, \quad x \in \langle 3;5 \rangle \quad (2)$$

- vyrovnání z devíti hodnot:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_x^{(9)} = & 0,2.m_x + 0,16.(m_{x-1} + m_{x+1}) + 0,12.(m_{x-2} + m_{x+2}) \\ & + 0,08.(m_{x-3} + m_{x+3}) + 0,04.(m_{x-4} + m_{x+4}) \end{aligned} \quad x \in \langle 6;29 \rangle \quad (3)$$

- vyrovnání z devatenácti hodnot:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_x^{(19)} = & 0,2.m_x + 0,1824.(m_{x-1} + m_{x+1}) + 0,1392.(m_{x-2} + m_{x+2}) + \\ & + 0,0848.(m_{x-3} + m_{x+3}) + 0,0336.(m_{x-4} + m_{x+4}) - 0,0128.(m_{x-6} + m_{x+6}) - \\ & - 0,0144.(m_{x-7} + m_{x+7}) - 0,0096.(m_{x-8} + m_{x+8}) - 0,0032.(m_{x-9} + m_{x+9}) \end{aligned} \quad x \in \langle 30;59 \rangle \quad (4)$$

Od 60 – ti do 82 let použijeme Gompertz – Makehamův model (Thatcher et al., 1998):

$$\mu_x = a + b.c^x, \quad x \in \langle 60;82 \rangle, \quad (5)$$

kde μ_x je intenzita úmrtnosti,

a, b a c jsou parametry modelu,

x je věk.

A pro věk od 83 let do 110 – ti let použijeme modifikovaný Gompertz – Makehamův model (Thatcher et al., 1998):

$$\mu_x = a + b.c^{\frac{x_0 + \frac{1}{\gamma} \cdot \ln[\gamma \cdot (x - x_0) + 1]}{\gamma}}, \quad x \in \langle 83; 110 \rangle, \quad (6)$$

kde $x > x_0$, x_0 je věk od kterého provádíme vyrovnání pomocí modifikovaného Gompertz – Makehamova modelu,

a , b , c a γ jsou parametry modelu.

Použití Modifikovaného Gompertz – Makehamova modelu zohledňuje fakt, že v nejvyšších věcích už nelze přírůstky úmrtnosti s rostoucím věkem považovat za konstantní. Naopak velikost přírůstků se postupně snižuje.

Pro náš příspěvek jsme si z již existujících logistických modelů vybrali Thatcherův a Kannistův model. Při použití zmíněných modelů získáme vyšší naději dožití. Vybrané modely se řadí mezi optimističtější.

Thatcherův model (*Thatcher et al.*, 1998; *Boleslawski & Tabeau*, 2001):

$$\mu_x = \frac{z}{1+z} + \gamma, \quad (7)$$

kde $z = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x}$, α , β a γ jsou parametry modelu.

Thatcherův model předpokládá logistický průběh křivky úmrtnosti.

Kannistův model (*Thatcher et al.*, 1998; *Boleslawski & Tabeau*, 2001):

$$\mu_x = \frac{e^{[\Theta_0 + \Theta_1 \cdot (x-80)]}}{1 + e^{[\Theta_0 + \Theta_1 \cdot (x-80)]}}, \quad \text{pro } x \geq 80 \quad (8)$$

kde Θ_0, Θ_1 jsou parametry modelu, které nabývají nezáporných hodnot, μ_x je intenzita úmrtnosti ve věku x .

Kannistův model je speciálním případem logistické funkce, kde logitová transformace měr úmrtnosti je vyjádřena jako lineární funkce věku.

Oba zmíněné logistické modely jsme použili pro extrapolaci křivky úmrtnosti pro stejné věkové rozmezí (tj. pro věk od 60 – ti do 85 – ti let).

V další části příspěvku jsme se zabývali výpočtem úmrtnostních tabulek bez extrapolace. K výpočtu byl použit algoritmus pro výpočet úplných úmrtnostních tabulek.

V poslední části jsme pro vyrovnávání specifických měr úmrtnosti v nejvyšších věcích použili již dříve zmíněný Gompertz – Makehamův a Modifikovaný Gompertz – Makehamův model. Oba tyto modely jsme použili pro vyrovnání specifických měr úmrtnosti mezi věky 60 a 85 let. Stejně věkové rozpětí jsme použili i u zmíněných logistických modelů z důvodu lepší porovnatelnosti výsledků.

3. Praktická část

Pro praktickou aplikaci byla použita data z roku 2009 pro pět vybraných členských zemí Evropské unie. Pro analýzu byly vybrány tyto země: Belgie, Bulharsko, Česká republika, Řecko a Švédsko. Výsledky jsou publikovány zvlášť pro muže a pro ženy.

Výsledky získané při použití zmíněných metod jsme uspořádali do tabulek. Jako ukázkou výpočtů jsme vybrali střední délku života v České republice pro muže a pro ženy.

Tab. 5: Naděje dožití v přesném věku – Česká republika - muži

Model	Naděje dožití v přesném věku - Česká republika - muži									
	0	15	20	50	65	80	85	90	95	100
Gompertz	74,2	59,6	54,7	26,5	15,2	7,1	5,2	3,7	2,6	1,8
Gompertz-Makeham	74,2	59,6	54,7	26,5	15,2	6,7	4,7	3,2	2,1	1,4
Kannistö	74,4	59,8	54,9	26,8	15,4	7,2	5,5	4,1	3,1	2,4
Thatcher	74,2	59,6	54,8	26,6	15,3	6,8	4,9	3,5	2,6	1,9
Úmrtnostní tabulka ČSÚ	74,2	59,6	54,7	26,6	15,3	6,8	4,8	3,4	2,4	1,7
Úmrtnostní tabulka bez extrapolace	75,0	60,6	55,7	27,4	15,8	7,2	5,1	3,7	3,3	6,5

Zdroj: vlastní výpočty

Tab. 6: Naděje dožití v přesném věku – Česká republika – ženy

Model	Naděje dožití v přesném věku - Česká republika - ženy									
	0	15	20	50	65	80	85	90	95	100
Gompertz	80,3	65,6	60,7	31,6	18,5	8,0	5,5	3,7	2,3	1,4
Gompertz-Makeham	80,2	65,5	60,6	31,5	18,4	7,6	5,1	3,2	1,9	1,1
Kannistö	80,4	65,7	60,8	31,7	18,6	8,2	5,9	4,1	2,9	2,1
Thatcher	80,3	65,6	60,7	31,6	18,5	7,8	5,3	3,5	2,4	1,8
Úmrtnostní tabulka ČSÚ	80,3	65,7	60,7	31,7	18,6	7,8	5,4	3,7	2,5	1,7
Úmrtnostní tabulka bez extrapolace	81,2	66,7	61,8	32,6	19,4	8,5	5,9	4,2	3,5	6,1

Zdroj: vlastní výpočty

4. Závěr

Ze získaných výsledků můžeme usuzovat, že Kannistův model patří mezi optimistické modely. Pokud budeme porovnávat získané výsledky s metodikou ČSÚ, tak zjistíme, že nejbližší je Thatcherův model.

Při porovnání získaných výsledků s úmrtnostními tabulkami bez extrapolace zjistíme, že nejbližší je Kannistův model.

Názory na vhodnost použití jednotlivých modelů se pravděpodobně budou v budoucnu měnit. Vše bude záviset na budoucím vývoji populace. A také na kvalitě poskytovaných statistických dat.

V současné době dávají demografové přednost logistickým modelům, které patří mezi optimističtější (Gavrilov – Gavrilova, 2011). Mezi nejfrekventovanější patří model Kannista.

5. Literatura

- [1] BOLESŁAWSKI, LECH, TABEAU, EWA 2001. Comparing Theoretical Age Patterns of Mortality Beyond the Age of 80. In: Tabeau, Eva, van den Berg Jeths, A. a Heathcote, Ch. (eds.) 2001. *Forecasting Mortality in Developed Countries: Insights from a Statistical, Demographic and Epidemiological Perspective*. s. 127 – 155. ISBN 978-0-7923-6833-5.

- [2] BURCIN, BORIS, TESÁRKOVÁ, KLÁRA A ŠÍDLO, LUDEK: "Nejpoužívanější metody vyrovnávání a extrapolace křivky úmrtnosti a jejich aplikace na českou populaci." *Demografie* 52, 2010: 77 – 89.
- [3] ČSÚ 2012. 19. 1. 2012.
<http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/umrtnostni_tabulky_metodika>
- [4] EUROSTAT. 4. 11. 2012. <<http://ec.europa.eu/eurostat>>
- [5] FIALA, TOMÁŠ: *Výpočty aktuárské demografie v tabulkovém procesoru*. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 2005. ISBN 80-2450821-4.
- [6] GAVRILOV, LEONID A., GAVRILOVA, NATALIA S.: "Mortality measurement at advanced ages: a study of social security administration death master file." *North American actuarial journal* 15 (3): 432 – 447.
- [7] GAVRILOV, LEONID A., GAVRILOVA, NATALIA S.: "Stárnutí a dlouhověkost: Zákony a prognózy úmrtnosti pro stárnoucí populace." *Demografie* 53, 2011: 109 – 128.
- [8] HUMAN MORTALITY DATABASE. 23. 8. 2012. <www.mortality.org>
- [9] KOSCHIN, FELIX: "Jak vysoká je intenzita úmrtnosti na konci lidského života?" *Demografie* 41 (2), 1999: 105 – 109.
- [10] PAVLÍK, ZDENĚK, KALIBOVÁ, KVĚTA: *Monohojazyčný demografický slovník*. Praha: Česká demografická společnost, 2005
- [11] THATCHER, ROGER A., KANISTÖ, VÄINÖ A VAUPEL, JAMES W. 1998.: *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*. 1998. ISBN 87-7838-381-1.

Příspěvek byl zpracován v rámci projektu VŠE IGA 29/2011 „Analýza stárnutí obyvatelstva a dopad na trh práce a ekonomickou aktivitu“.

Adresa autorů

Petra Dotlačilová, Ing.
VŠE v Praze, katedra demografie
Nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
xdotp00@vse.cz

Jana Langhamrová, Bc.
VŠE v Praze, katedra demografie
Nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
jana.langhamrova@vse.cz

Ondřej Šimpach, Ing.
VŠE v Praze, katedra demografie
Nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
ondrej.simpach@vse.cz